

Solution au concours FFJM-SCM 2011-2012

« Choix du meilleur itinéraire »

Éric D. Taillard

Institut de Systèmes Embarqués, Haute École d'Ingénierie et de Gestion du Canton de Vaud
Route de Cheseaux 1, CP, CH-1401 Yverdon-les-Bains, Suisse, eric.taillard@heig-vd.ch

17 février 2012

Partie A — Problème déterministe

Trajet de temps minimal

L'application d'un algorithme standard de chemin optimum nous donne le trajet donné dans la figure 1. Le temps pour parcourir les 12 segments limités à 110km/h (en rouge dans la figure), les 2 segments à 130km/h (en bleu), les 3 segments à 90km/h (en jaune) et l'unique segment à 50km/h (en vert) est de $T_0 = 64011,188811$ secondes.

Trajet de coût minimal

La vitesse du véhicule permettant de minimiser le coût de traversée d'un segment est donnée par $\sqrt{5 \cdot 100 / 0,0625 \cdot 1,3} \approx 78,446454$ km/h. Un trajet à coût minimum doit donc utiliser aussi peu de segments limités à 130km/h en raison des péages ou de segments limités à 50km/h en raison des surcoûts liés à l'hébergement. Tous les chemins à coût minimum utiliseront donc le sous-réseau donné dans la figure 2. Il existe 3312 chemins de coût minimum différents. Ils sont représentés dans la figure 3 (par égard pour nos forêts, j'ai mis tous ces chemins sur la même figure ; utiliser un grossissement approprié dans Acrobat Reader pour les visualiser commodément !).

Partie B — Problème probabiliste

Tout d'abord, il s'agit de déterminer la probabilité qu'il y ait un ou plusieurs radars mobiles sur un segment.¹ Vu l'indépendance des placements, on détermine aisément cette probabilité comme étant $1 - (179/180)^{20} \approx 0,105738$. L'espérance du coût de l'amende sur un segment où l'on ne dépasse pas 1,1 fois la vitesse autorisée est de 0. Lorsqu'on dépasse cette vitesse de plus de 1,1 fois mais sans la dépasser de plus de 1,5 fois, l'espérance du coût est de $0,7 \cdot 100 \cdot (1 - (179/180)^{20}) \approx 7,38$ euros — s'il n'y a pas de radar fixe. Lorsqu'on dépasse 1,5 fois la vitesse autorisée cette espérance passe à $0,9 \cdot 200 \cdot (1 - (179/180)^{20}) \approx 18,98$ euros.

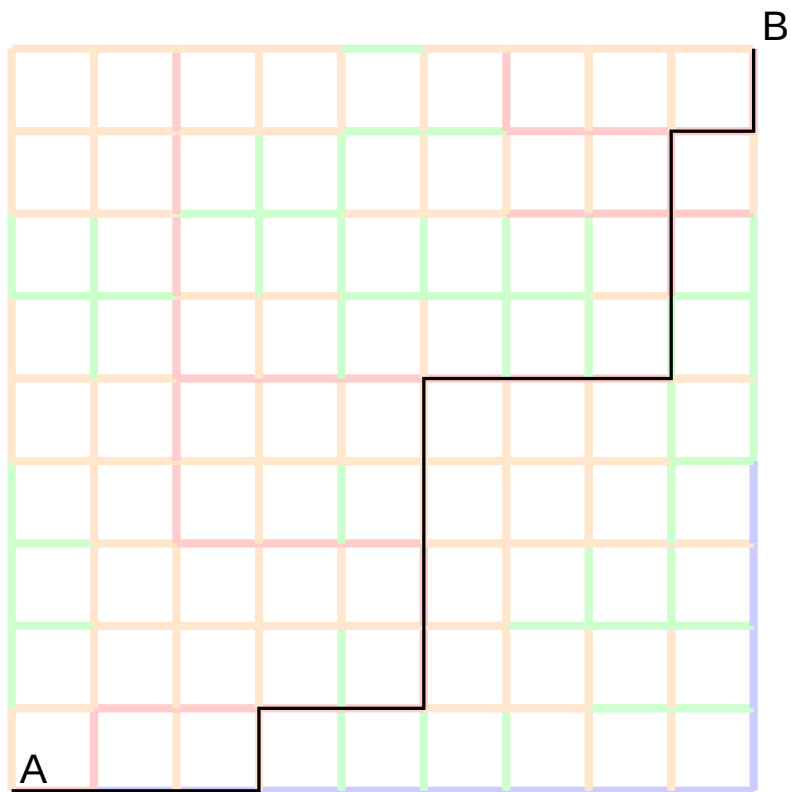
La solution de durée $0,8T_0 = 51208,951048$ secondes dont l'espérance de coût est minimale est donné en figure 4. L'espérance du coût de cette solution est d'environ 341,59145 euros.²

Les 15 segments limités à 110km/h sont parcourus à 121km/h, sans risquer d'amende. Les 2 segments limités à 90km/h sont parcourus à 135km/h, en risquant une faible amende. Le segment limité à 50km/h est parcouru à environ 288,572865 km/h en risquant une forte amende. Cette solution a été obtenue en utilisant la technique de stratification des objectifs décrite dans [1].

1. On interprète ici l'énoncé de la façon suivante, conforme à la législation : si plusieurs radars détectent un dépassement de vitesse sur le même segment, l'automobiliste n'encourt qu'une seule amende (car il n'a enfreint la loi qu'une fois).

2. Il faut noter ici que le trajet optimal ne change pas si on fait une autre interprétation de l'énoncé : l'automobiliste paie une amende par radar l'ayant détecté sur un même segment. Seule l'espérance du coût augmente, passant à 343,41 euros environ).

FIGURE 1 – Trajet de temps minimal de A à B en respectant toutes les limitations de vitesse.



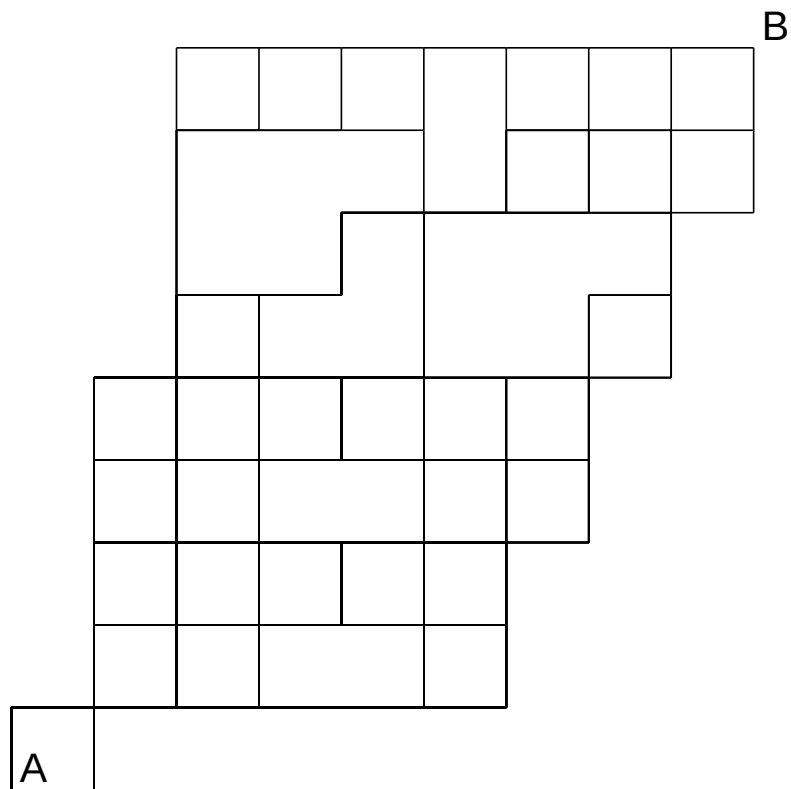
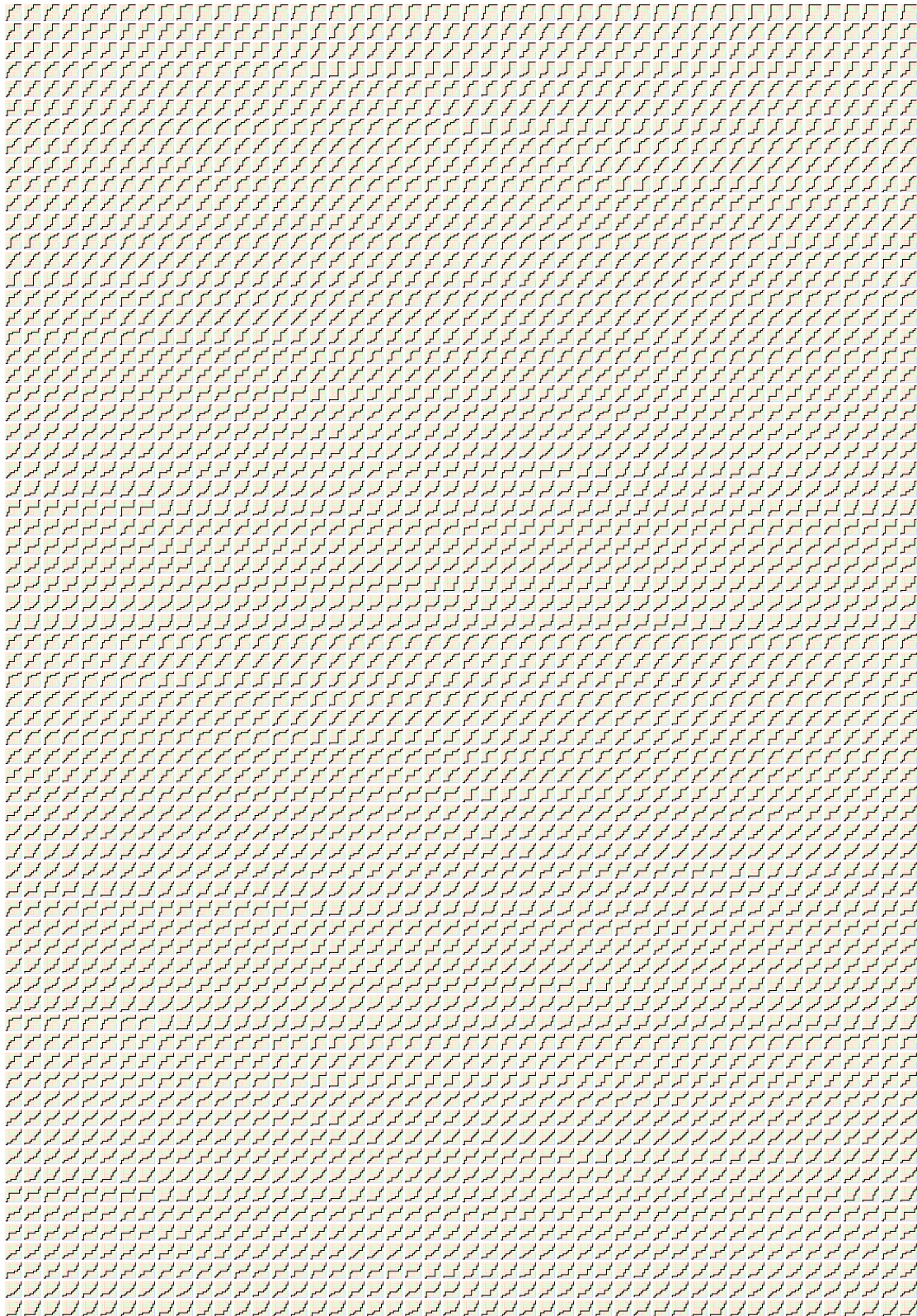
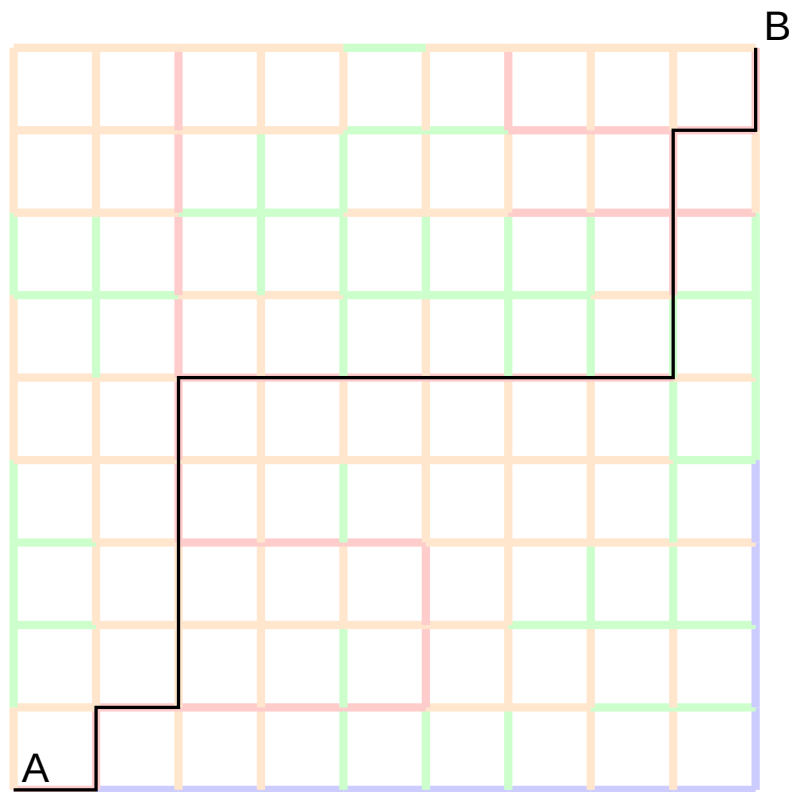


FIGURE 3 – Les 3312 trajets de coût minimum de A à B .



Références

- [1] Éric D. Taillard, P. Bailly, J.-F. Affolter, P. Goulpié, Ph. Morey, « Logiciel d'aide à la navigation pour bateau solaire – Routage optimal du catamaran PlanetSolar », *Bulletin VSE/AES* 1106, 2011, 22–26.